

Vetores e Matrizes no plano

Prof. André Luís Corte Brochi

Descrição

Os conceitos de vetor e matriz e suas representações geométrica e algébrica.

Propósito

Expor os conceitos básicos de vetor e matriz, relacionando-os às suas aplicações no cotidiano.

Preparação

Antes de começar, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica, ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

Objetivos

Módulo 1

Vetores e aplicações

Identificar o conceito de vetor e sua aplicação através de representações geométrica e algébrica.

Módulo 2

Vetores no plano

Aplicar pontos e vetores no plano através das funções trigonométricas seno e cosseno.

Módulo 3

Matrizes

Operar com matrizes.

Módulo 4

Matrizes como transformações lineares

Reconhecer matrizes como transformações lineares.

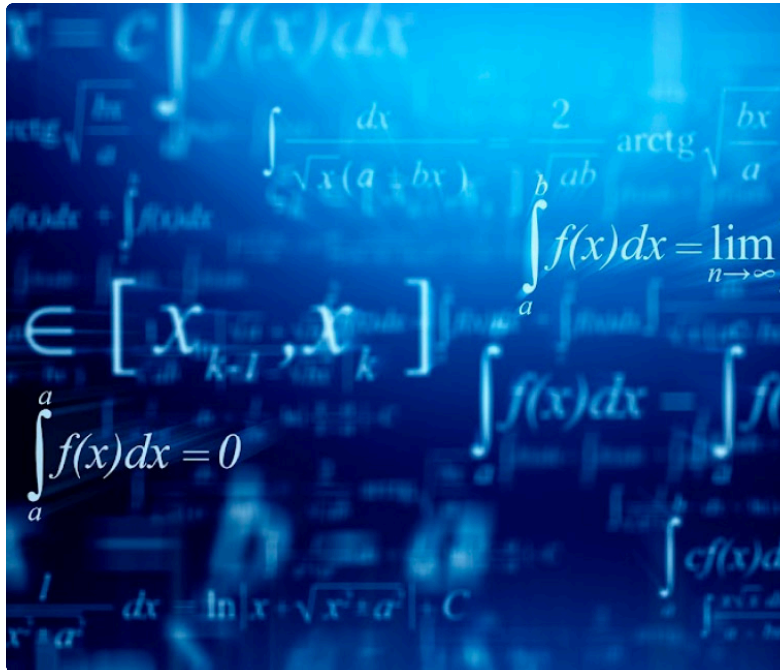


Introdução

Assista ao vídeo Vetores e matrizes no plano.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





1 - Vetores e aplicações

Ao final deste módulo, você será capaz de identificar o conceito de vetor e sua aplicação através de representações geométrica e algébrica.

Grandezas

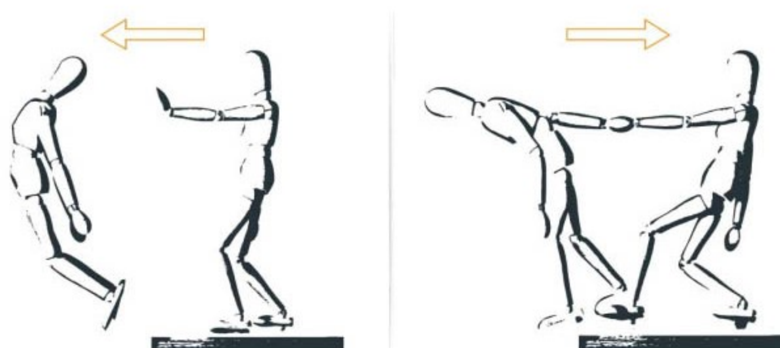
Várias grandezas de nosso cotidiano podem ser plenamente descritas pela especificação de sua magnitude (ou intensidade). O comprimento de uma mesa, a área de uma fazenda, a capacidade volumétrica de um recipiente com suco de laranja ou a temperatura ambiente, por exemplo, são grandezas expressas de maneira adequada por apenas um número associado à unidade de medida escolhida.

Assim, temos metro para o comprimento da mesa; quilômetro quadrado para a área de uma fazenda; mililitro para a capacidade do recipiente e graus Celsius para a temperatura ambiente.

Grandezas dessa natureza, que são definidas apenas pelo valor numérico que especifica sua magnitude, são denominadas **grandezas escalares**. No entanto, há inúmeras grandezas que não ficam completamente definidas ao indicar apenas a sua magnitude.

A intensidade da velocidade de um avião, por exemplo, indica o quão rápido ele se desloca, mas nada informa em qual direção ou sentido seu deslocamento (movimento) ocorre.

Da mesma forma, quando aplicamos uma força para empurrar uma pessoa, é essencial informar em qual direção e sentido estamos atuando, para que a nossa ação fique claramente definida. Tais grandezas, descritas com a especificação de sua magnitude, direção e sentido são denominadas de **grandezas vetoriais**.



Vetores

Um **vetor**, portanto, é uma entidade abstrata que possui três elementos associados:

1. Magnitude (ou intensidade ou, ainda, módulo);
2. Direção;
3. Sentido.

Relembrando

Se você estudou um pouco de Física, no Ensino Médio, deve se lembrar de que eram usadas setinhas para representar geometricamente as grandezas vetoriais. Vamos relembrar essa questão para que fique claro que as setinhas, também chamadas de segmentos orientados, são, de fato, uma utilíssima forma de representar vetores.



Vetores

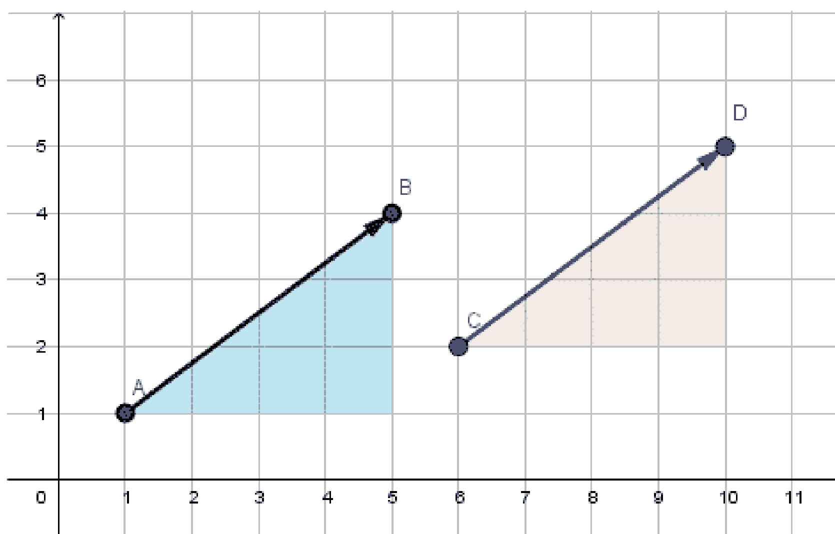
No vídeo a seguir, o professor apresenta mais informações sobre vetores. Assista:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Representação geométrica de vetores

No sistema de eixos indicado, observe os pontos $\mathbf{A}(1,1)$ e $\mathbf{B}(5,4)$ e a seta (ou segmento orientado) de origem em **A** e extremidade em **B**, representados por $\overrightarrow{AB}$. Se deslocarmos $\overrightarrow{AB}$ paralelamente a si mesma, estabelecendo um novo ponto de origem, como o ponto **C**, por exemplo, a extremidade desta nova seta será o ponto **D** e na seta $\overrightarrow{CD}$ serão preservados os mesmos comprimento, direção e sentido que em $\overrightarrow{AB}$.



Desse modo, qualquer seta obtida por translação da seta $\overrightarrow{AB}$ possui as mesmas três características e, portanto, representará o mesmo vetor. E é claro, há infinitas setas como essas que são, então, chamadas de **equivalentes**.

Componentes horizontal e vertical de um vetor

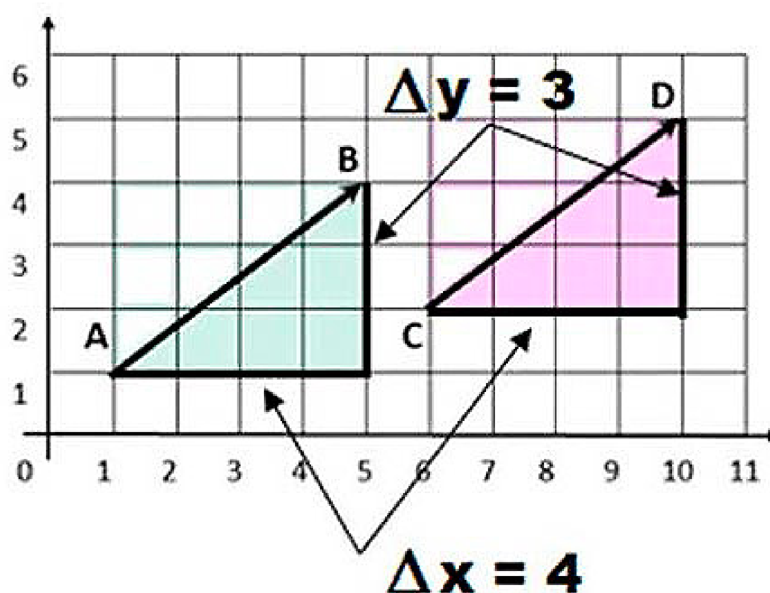
Vamos calcular as diferenças entre as abscissas e as ordenadas dos pontos extremidade e origem das setas equivalentes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ da imagem anterior. Diferença entre as abscissas (extremidade menos origem): Δx.

$$x_B - x_A = 5 - 1 = 4$$
$$x_D - x_C = 10 - 6 = 4$$

Diferença entre as ordenadas (extremidade menos origem): Δy.

$$y_B - y_A = 4 - 1 = 3$$
$$y_D - y_C = 5 - 2 = 3$$

Ficou surpreso por obtermos os mesmos valores? Você percebe que, neste caso, obtivemos valores positivos que são exatamente o tamanho dos catetos horizontal e vertical dos triângulos retângulos da imagem a seguir?

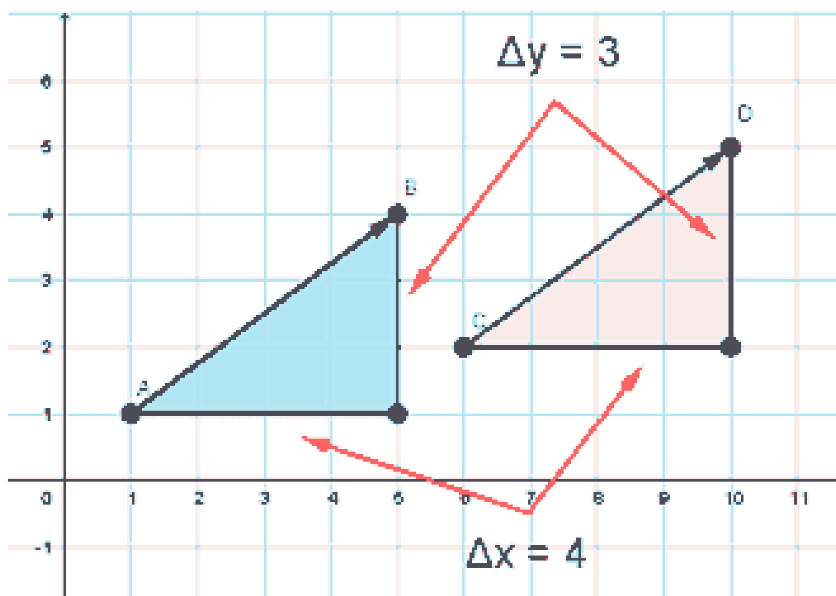


Ou seja, em qualquer seta que você escolher, equivalente à seta $\overrightarrow{AB}$, por exemplo, tais diferenças permanecerão inalteradas e são chamadas, respectivamente, de componente horizontal e componente vertical do vetor. Note que esses valores definem um vetor de forma única, pois são independentes da seta que o representa.

Veja a interpretação geométrica dessa discussão!

Se você partir do ponto A e se deslocar $+4$ unidades na horizontal (Δx: valor da componente horizontal) $\mathrm{e} + 3$ unidades na vertical (Δy.

componente vertical), você atinge exatamente a extremidade B, da seta $\overrightarrow{AB}$! Se partir do ponto C chegará, naturalmente, ao ponto $\mathbf{D}$...



Responda, agora, à importante pergunta que ainda resta, para prosseguirmos nosso estudo: Se você escolhesse a origem do sistema de eixos $O(0,0)$ como ponto origem de um segmento orientado $\overrightarrow{OP}$, equivalente à $\overrightarrow{AB}$, quais seriam as coordenadas de sua extremidade, o ponto $\mathbf{P}$? E então?

Você percebeu que as coordenadas de **P** serão exatamente Δx e Δy, as componentes horizontal e vertical do vetor representado?

Agora, mãos à obra...



Teoria na prática

Dados os pontos $\mathbf{M}(2,5)$, $\mathbf{N}(5,6)$ e $\mathbf{P}(8,1)$, determine as componentes horizontais e verticais dos vetores representados pelos segmentos orientados, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ e $\overrightarrow{PM}$.

Mostrar solução

Representação de um vetor

Vimos que qualquer segmento orientado (seta) que represente um vetor, independentemente de seu ponto de origem, possuirá os mesmos

valores Δx e Δy, o que nos permitiu definir tais valores como **componentes** do vetor (para o qual não existe o conceito de ponto de origem).

Como consequência, se desejamos explicitar um vetor (não importa o segmento orientado que o represente), podemos simplesmente indicar suas componentes.

De fato, chamando de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ um vetor qualquer, e u_x e u_y suas componentes, utilizaremos a notação $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\mathrm{u}_x, \mathrm{u}_y)$ para representá-lo.



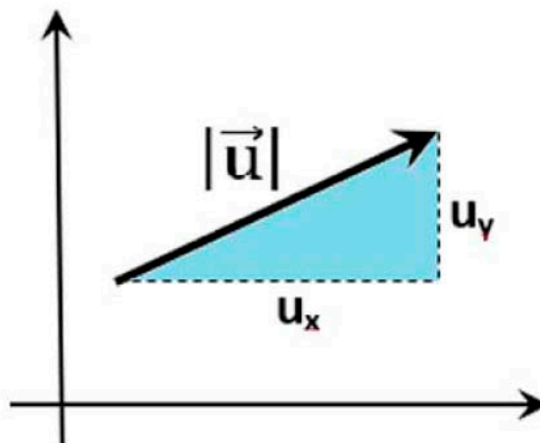
Teoria na prática

> Represente o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{3}, -\mathbf{4})$ graficamente e calcule sua magnitude, ou seja, o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente.

Mostrar solução

Módulo de um vetor

O exemplo anterior sugere que o valor do **módulo** ou **norma** de um vetor (ou sua magnitude) pode ser facilmente calculado pelo Teorema de Pitágoras. Veja: se $|\vec{u}| = (u_x, u_y)$, seu módulo, representado por $|\vec{u}|$, é a medida da hipotenusa do triângulo indicado.



Pelo Teorema de Pitágoras:

$$|\vec{u}|^2 = u_x^2 + u_y^2$$

Logo,

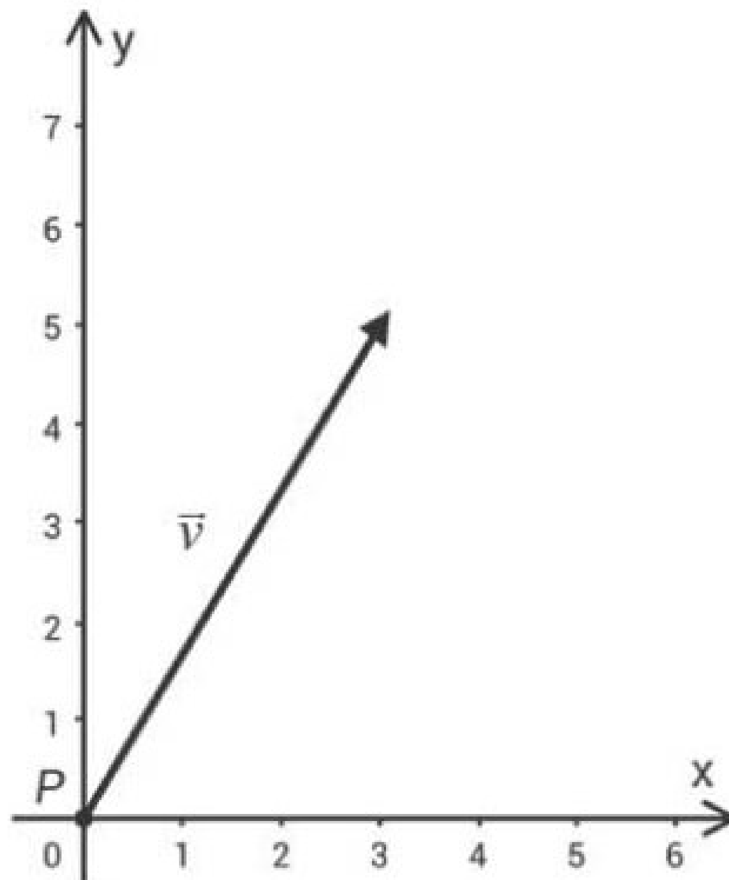
$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Veja, a seguir, um exemplo:

Na Física, como vimos, vetores são utilizados na representação de inúmeras grandezas vetoriais, tais como velocidade, aceleração, força, peso, entre outras.

Quando representamos a velocidade de uma partícula, por exemplo, o vetor explicita qual a direção (instantânea) e o sentido do movimento.

Assim, uma partícula que, em dado instante se encontra em um ponto P, movimenta-se com velocidade dada pelo vetor $\vec{v} = (3, 5)$. Posicionando a origem do sistema cartesiano no ponto P, podemos representar o movimento (instantâneo) dessa particula, no instante considerado, como indicado na imagem.



Considerando o deslocamento medido em metros e o tempo em segundos, nesse instante, a partícula se encontra a uma velocidade de

módulo igual a:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \cong 5,8 \text{ m/s}$$

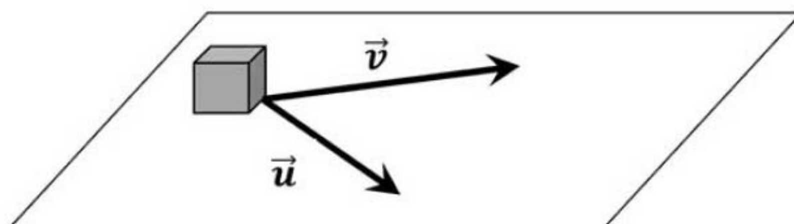
Operação com vetores - motivação

Adição de vetores

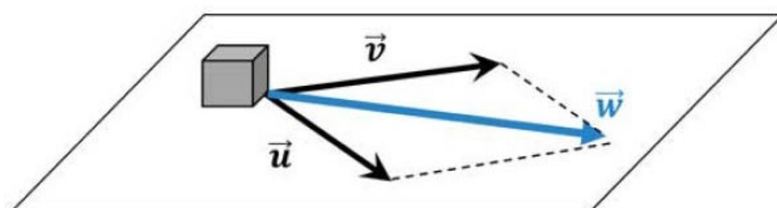
As operações usuais envolvendo vetores podem ser compreendidas, facilmente, a partir dos conceitos que foram estudados no Ensino Médio relativos a forças.

Veja:

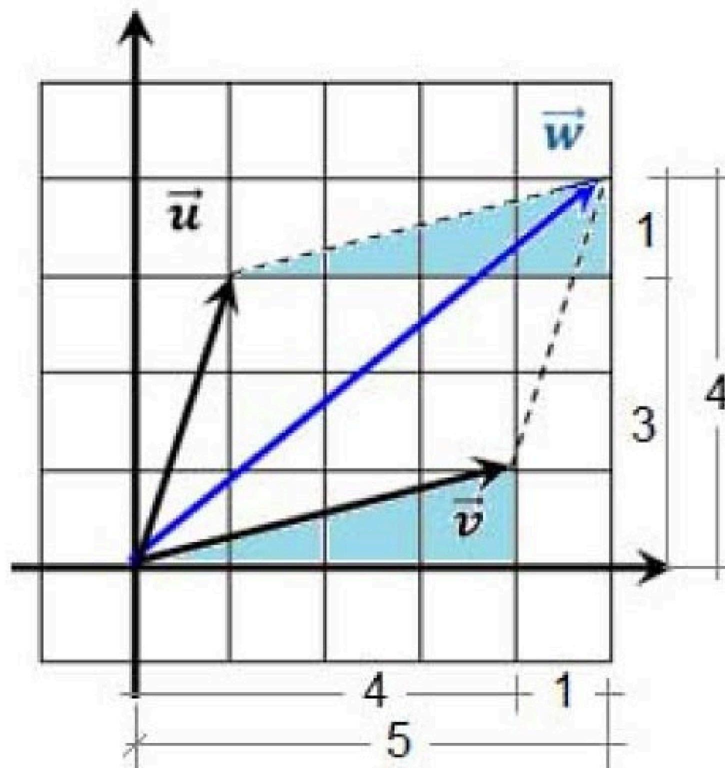
Se duas forças $\vec{u}$ e $\vec{v}$ puxam um pequeno objeto, como sugere a imagem, qual a força única, $\vec{w}$, que propiciaria o mesmo efeito que as duas forças $\vec{u}$ e $\vec{v}$ atuando simultaneamente sobre ele? Quais seriam sua intensidade (magnitude), direção e sentido?



A resposta a essa questão é a famosa **Regra do Paralelogramo**. Tal regra afirma que a força $\vec{w}$ é representada pela diagonal do paralelogramo indicado, onde seus lados coincidem com as representações dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Por exemplo, suponhamos os vetores (forças) representados por $\vec{u} = (u_x, u_y) = (1, 3)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y) = (4, 1)$, como mostra a imagem.



Formando o paralelogramo sugerido, os triângulos coloridos são iguais. Você percebe que, como consequência, as componentes de $\vec{w}$ são a soma das componentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

Ou seja,

$$\vec{w} = (u_x + v_x, u_y + v_y) = (1 + 4, 3 + 1) = (5, 4)$$

Produto por escalar

Uma situação mais simples do que a soma dos vetores descrita no item anterior é o significado que desejamos atribuir a um múltiplo de um vetor, como seu dobro ou triplo.

Exemplo

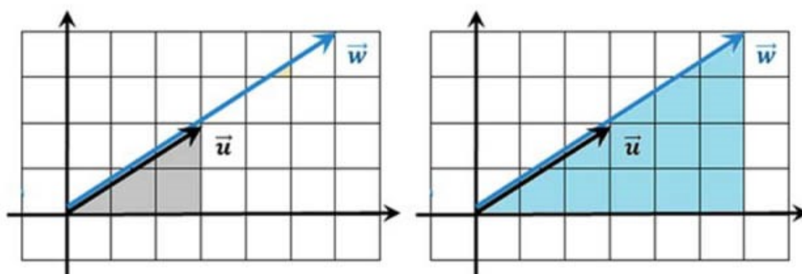
Dada a força $\vec{u} = (3, 2)$, quais seriam as componentes de uma força que correspondesse a seu dobro?

Provavelmente você concorda que estamos interessados em criar uma operação do tipo o *produto de um número por um vetor*. Sem dúvida, e assumindo que desejamos manter a direção e o sentido do resultado, desejamos é que a magnitude – intensidade, módulo do vetor resultado – seja o dobro da intensidade do vetor original.

As imagens sugerem que os triângulos retângulos coloridos devem manter uma proporção. Assim, se desejamos que a intensidade de $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u}$ medida pela hipotenusa do segundo triângulo seja o dobro da

hipotenusa de $\vec{u}$ (medida pela hipotenusa do primeiro triângulo), certamente seus catetos de ambos os triângulos devem guardar a mesma relação. Assim, os catetos dobram e eles traduzem (a menos de sinais) as componentes do vetor resultado, ou seja:

$$\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (3 \cdot 2) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 2) = (6, 4)$$



Os itens anteriores nos sugerem definir, de forma geral, a operação de soma entre vetores e a operação de produto de um número (também chamado de escalar) por um vetor. Vejamos.

Operação entre vetores - definição

Adição

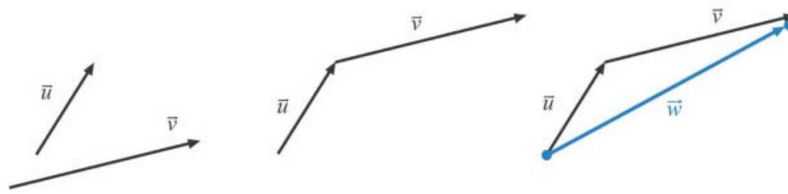
Dados dois vetores $\vec{u} = (u_x, u_y)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$, diremos que $\vec{w}$ é sua soma, e escrevemos $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, quando as componentes de $\vec{w}$ forem as somas das componentes correspondentes de u e v. Ou seja:

$$\vec{w} = (w_x, w_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

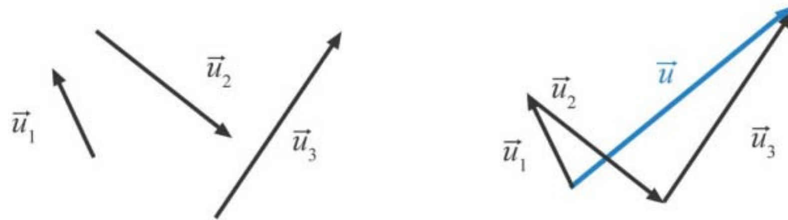
As imagens, a seguir, sugerem que além da Regra do Paralelogramo, podemos usar um esquema equivalente, mais útil, que permite determinar a soma de mais do que dois vetores.

Veja os exemplos a seguir:

Imagine que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a serem somados, foram emendados em fila com setas adequadas que os representem: o vetor soma está representado pela seta que une a origem da primeira seta com a extremidade da última parcela.



Agora, veja a representação da soma $\overrightarrow{u}$, dos vetores $\vec{u}_1$, $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{u_3}$, graficamente:



Multiplicação de escalar por vetor

Dado um vetor $\vec{u} = (x, y)$ e um escalar real a. Definimos o vetor produto de a por $\vec{u}$ como o vetor $a \cdot \vec{u}$ dado por:

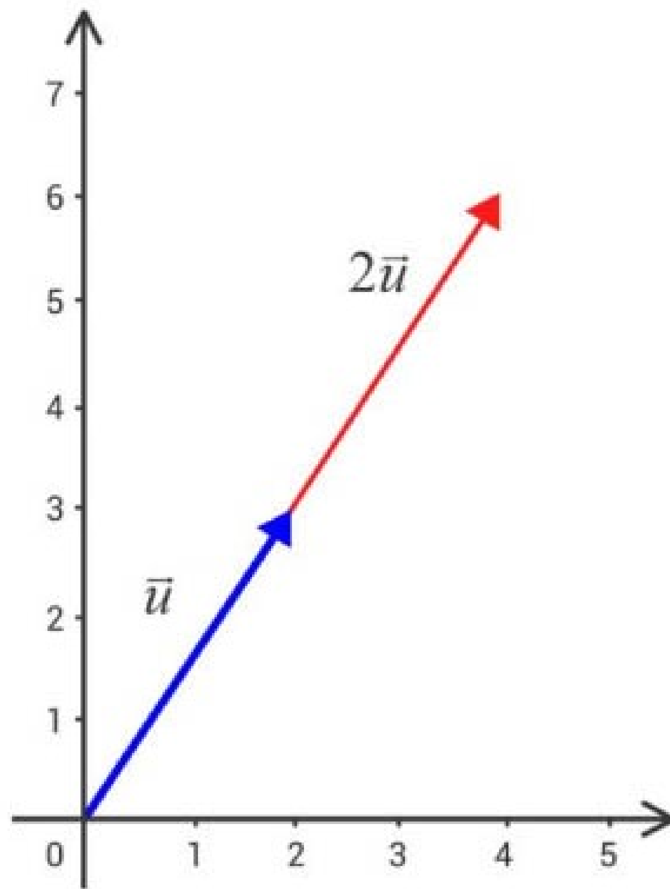
$$a \cdot \vec{u} = (ax, ay)$$

Determine o produto do vetor $\vec{u} = (2, 3)$ pelos escalares 2, -1 e $\frac{1}{2}$.

$$\begin{gathered} 2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (2, 3) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3) = (4, 6) \\ (-1) \cdot \vec{u} = -1.(2, 3) = (-1 \cdot 2, -1 \cdot 3) = (-2, -3) \\ \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \cdot (2, 3) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2, \frac{1}{2} \cdot 3\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{gathered}$$

Para compreender melhor o que ocorre quando multiplicamos o vetor por um escalar, veja a representação gráfica do vetor $\vec{u} = (2, 3)$ e de cada um dos vetores resultantes das multiplicações anteriores.

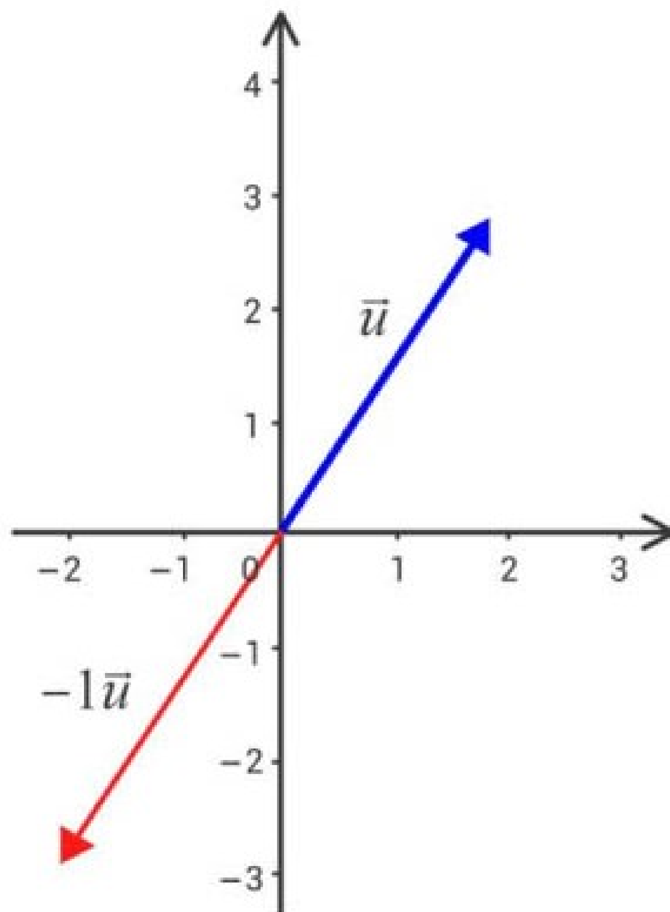
Na imagem a seguir, observe que os vetores $\vec{u} = (2, 3)$ e $2\vec{u} = (4, 6)$ têm mesma direção, mesmo sentido, mas o módulo do segundo é o dobro do módulo do primeiro.



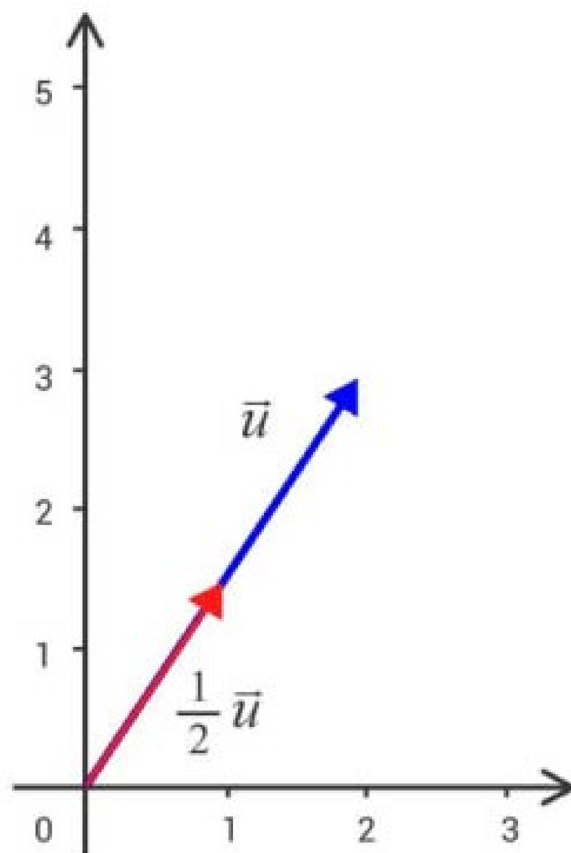
Comprovando:

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad e \quad |\overrightarrow{2u}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$$

Na imagem, a seguir, perceba que os vetores $\vec{u} = (2, 3)$ e $(-1) \cdot \vec{u} = (-2, -3)$ têm mesma direção, mesmo módulo e sentidos contrários. Ou seja, quando o escalar é negativo, inverte o sentido do vetor.



Na imagem, vemos que os vetores $\vec{u} = (2, 3)$ e $\frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ têm mesma direção, mesmo sentido e o módulo do segundo corresponde à metade do módulo do primeiro.



Vetores que possuem a mesma direção são considerados paralelos. Vimos que, quando multiplicamos um vetor por um escalar não nulo, obtemos outro vetor de mesma direção que o primeiro. Sendo assim, podemos concluir que dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos quando suas coordenadas são proporcionais, isto é, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Em resumo, temos:

- Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$;
- Se $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, então $\boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ tem sentido oposto ao de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$;
- Se $|a| = 1$, então $\boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ tem módulo igual ao de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}_;}$;
- Se $\mathbf{0} < |\boldsymbol{a}| < \mathbf{1}$, então $\boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ tem módulo menor que o de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$;
- Se $|\boldsymbol{a}| > 1$, então $\boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ tem módulo maior que o de $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.

Combinação linear

Dados dois vetores não nulos e não paralelos $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, podemos escrever qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ como combinação linear desses dois vetores. Isso corresponde a dizer que qualquer que seja o vetor $\vec{w} = (x, y)$, existem os escalares a e b tais que: $\vec{w} = \overrightarrow{a\vec{u}} + \overrightarrow{bv}$

Dizemos, então, que o conjunto de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ constitui uma base do $\mathbb{R}^2$.

Veja o exemplo a seguir:

Vamos escrever o vetor $\vec{w} = (3, 5)$ como combinação linear dos vetores não paralelos $\vec{u} = (1, 3)$ e $\vec{v} = (0, -4)$. Temos, portanto, que determinar os escalares a e b tais que $(3, 5) = a(1, 3) + b(0, -4)$.

Simplificando a igualdade apresentada, temos:

$$(3, 5) = (a, 3a) + (0, -4b)$$
$$(3, 5) = (a, 3a - 4b)$$

Que nos leva ao sistema:

$$\begin{cases} a = 3 \\ 3a - 4b = 5 \end{cases}$$

Substituindo a por 3 na segunda equação do sistema vista anteriormente, teremos:

$$\begin{gathered} 3 \cdot 3 - 4b = 5 \\ 9 - 4b = 5 \\ -4b = 5 - 9 \\ -4b = -4 \\ b = \frac{-4}{-4} \\ b = 1 \end{gathered}$$

Como sua solução é $a = 3$ e $b = 1$, então podemos escrever $\vec{w} = 3\vec{u} + \vec{v}$.

Para representarmos vetores no plano, em diversas situações, costumamos utilizar uma base que é denominada base canônica do $\mathbb{R}^2$ sendo composta pelos vetores:

$$\vec{i} = (1, 0) \text{ e } \vec{j} = (0, 1)$$

Para qualquer vetor $\vec{w} = (x, y)$, do $\mathbb{R}^2$, suas coordenadas em relação à base canônica serão os próprios valores x e y, pois:

$$\vec{w} = (x, y) = \overrightarrow{ai} + \overrightarrow{bj} = a(1, 0) + b(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$$

Daí vemos que $a = x$ e $b = y$.



Teoria na prática

Uma das principais aplicações de vetores na Física diz respeito à indicação da força que atua em corpos. Além de indicar a sua direção e o seu sentido, a sua magnitude corresponde ao módulo do vetor que representa essa grandeza física.

Quando consideramos que mais de uma força atua sobre o corpo, podemos determinar o que chamamos de força resultante,

cujo efeito equivale ao da aplicação das várias forças que atuam sobre esse corpo.

A força resultante de um sistema de duas ou mais forças que atuam sobre um corpo é determinada gráfica e algebricamente pela adição dos vetores que representam as forças desse sistema.

Considere que sobre um corpo, representado no gráfico, a seguir, pelo ponto **P**, atuam 2 forças que são representadas pelos vetores $\overrightarrow{F_1} = (-2, 3)$ e $\overrightarrow{F_2} = (4, 1)$. Determine, algébrica e graficamente, a força resultante $\overrightarrow{F_R}$ equivalente a esse sistema de forças e sua magnitude.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Dado o vetor $\vec{u} = (-1, 2)$, um vetor na mesma direção e sentido oposto ao de $\vec{u}$ e metade de seu módulo é:

A $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

B $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

C $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

D $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

E $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Para que o sentido seja oposto, o escalar deve ser negativo. Como o módulo deve ser reduzido à metade, então o escalar é $-\frac{1}{2}$.

$-\frac{1}{2}\vec{u} = -\frac{1}{2}(-1, 2) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Questão 2

O vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ unitário (de módulo igual a 1) que tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor $\vec{v} = (1, 2)$ é:

A $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

B $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

C $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

D $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

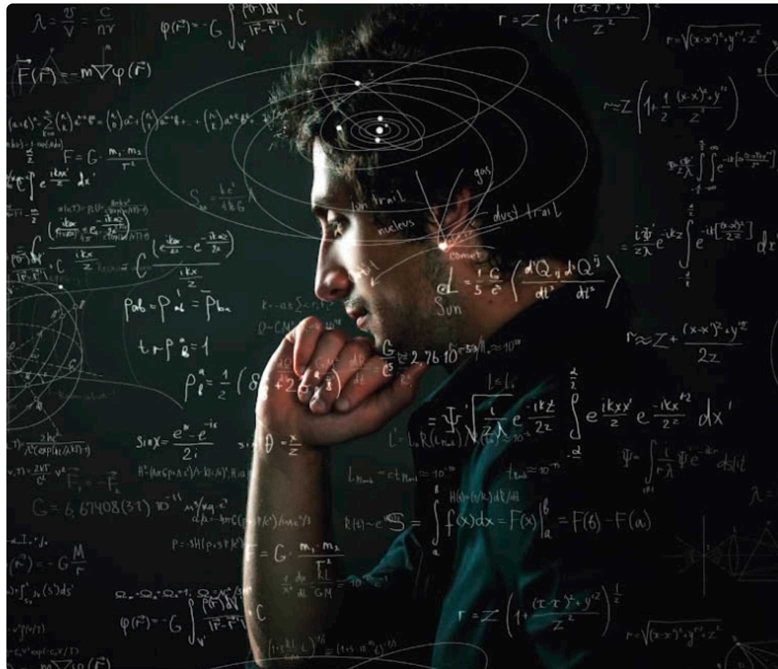
E $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Parabéns! A alternativa C está correta.

Observe que o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ não é unitário, pois seu módulo é igual a $\sqrt{5}$. Para obter um vetor paralelo a ele (mesma direção e mesmo sentido) com módulo igual a 1, basta multiplicá-lo pelo escalar $\frac{1}{|\vec{v}|}$

que é o inverso de seu módulo. Então, o vetor solicitado será dado por:

$$\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

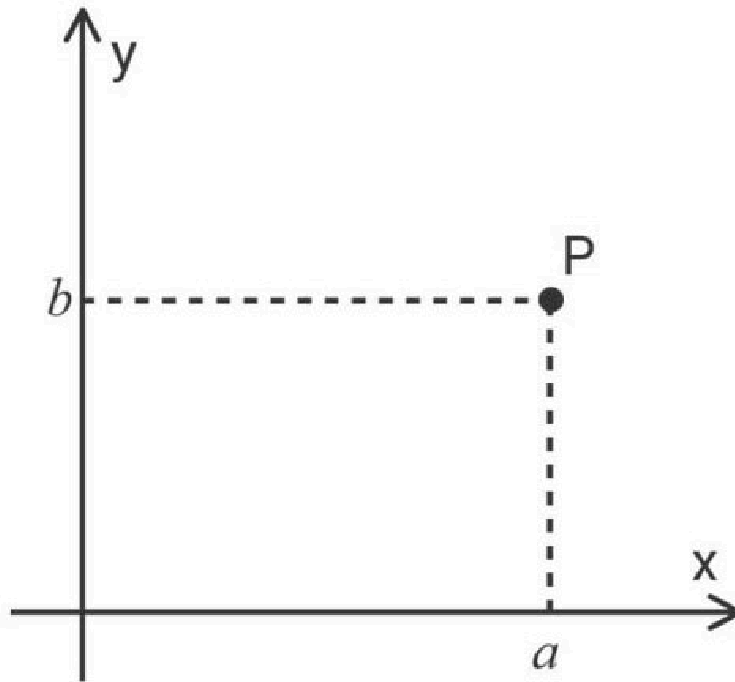


2 - Vetores no plano

Ao final deste módulo, você será capaz de aplicar pontos e vetores no plano através das funções trigonométricas seno e cosseno.

Representação de um ponto no plano utilizando seno e cosseno

Para representar um ponto qualquer no plano, muitas vezes utilizamos o sistema de coordenadas cartesianas (ou retangulares), como fizemos com os vetores. Definimos o ponto genérico $P = (a, b)$ em que a é a sua projeção no eixo horizontal x e b sua projeção no eixo vertical y, como representado na imagem.



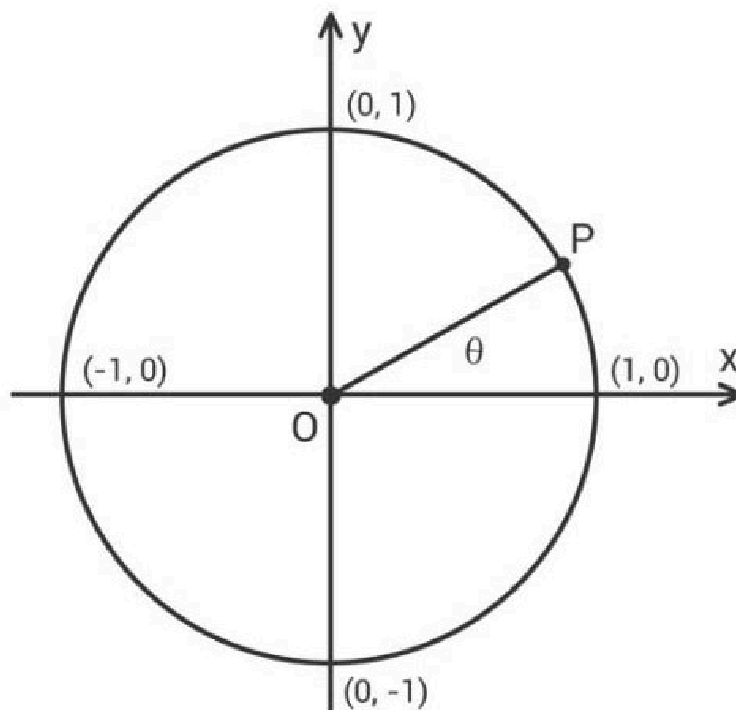
Trata-se de uma forma simples e prática de representação que permite uma rápida e fácil interpretação. Tanto que é utilizada em diversos ramos da Matemática, por exemplo, no estudo de funções escalares e funções vetoriais.

Atenção!

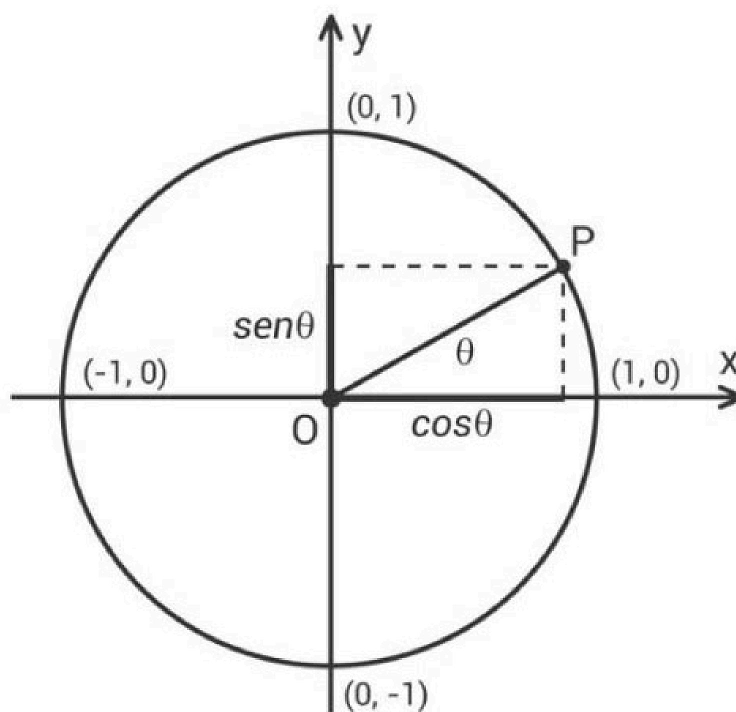
Há diversas outras situações, como no estudo de movimentos circulares, ondas, campos magnéticos, entre outras, em que os pontos do plano são representados por um ângulo e uma distância, o que torna certos procedimentos algébricos bem mais simples. Para relacionar as duas representações, vamos utilizar as funções trigonométricas seno e cosseno.

Para compreender esse tipo de representação, vamos começar pelos pontos que se localizam sobre a circunferência de centro no ponto $O = (0, 0)$, que é a origem do sistema de eixos cartesianos, e de raio de medida igual a **1**. Essa circunferência é conhecida como ciclo trigonométrico. Nele é que costumamos representar as funções trigonométricas.

Inicialmente, considere um ponto $\mathbf{P}$ sobre essa circunferência, no 1º quadrante, como ilustrado na imagem. Esse ponto define o segmento $\overrightarrow{OP}$ que é o raio da circunferência e define um ângulo de medida θ com o semieixo positivo x.



Observe que a projeção do ponto $\mathbf{P}$ sobre o eixo x coincide com o cosseno do ângulo θ e a projeção sobre o eixo y. com o seno de θ, como indicado na imagem.



Dessa forma, podemos definir o ponto a partir somente da medida do ângulo θ, já que sabemos que sua distância em relação à origem (ponto O) é igual a 1 (medida do raio do ciclo trigonométrico). A representação, portanto, do ponto $\mathbf{P}$ pode ser dada por:

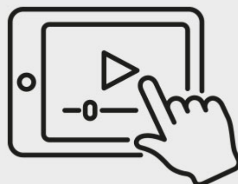
$$P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

Lembre-se de que a medida do ângulo θ é determinada a partir do semieixo positivo x, no sentido anti-horário.



Operações com vetores

No vídeo a seguir, o professor apresenta mais detalhes sobre este assunto. Assista:

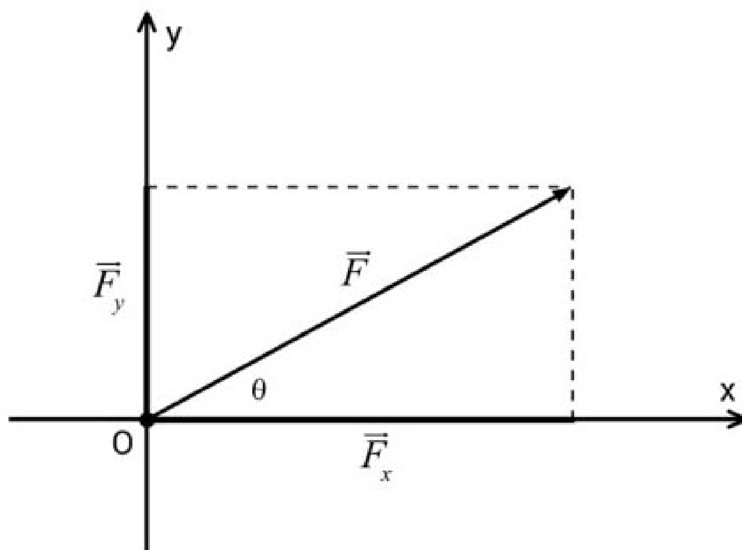




Teoria na prática

Uma aplicação de suma importância para a representação que você está estudando ocorre quando utilizamos a decomposição vetorial, que é uma das operações realizadas com vetores e que é definida como a determinação dos componentes de um vetor escritos sobre os eixos x e y do plano cartesiano.

A imagem, a seguir, ilustra esse tipo de decomposição com um vetor que representa a força aplicada sobre determinado corpo. Esse tipo de operação é largamente utilizada nos cálculos físicos envolvendo o estudo do movimento, eletricidade, ondas, entre outros.



Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Sobre um corpo atuam duas forças representadas pelos vetores $\overrightarrow{F_1} = (x, 4)$ e $\overrightarrow{F_2} = (-2, -3)$. Sabendo que a força resultante é dada por $\vec{F} = 2(\cos 30^\circ, \operatorname{sen} 30^\circ)$, qual é o valor de $\boldsymbol{x}$?

A $2 + \sqrt{3}$

B $3 + \sqrt{2}$

C $1 + \sqrt{3}$

D $1+\sqrt{2}$

E $2-\sqrt{3}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Como $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$, isto é:

$$2\left(\cos 30^{\circ}, \operatorname{sen} 30^{\circ}\right)=(x, 4)+(-2,-3)$$
$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)=(x, 4)+(-2,-3)$$
$$(\sqrt{3}, 1)=(x, 4)+(-2,-3)$$

Podemos obter a equação:

$$x-2=\sqrt{3} \Rightarrow x=2+\sqrt{3}$$

Questão 2

Dados os vetores $\vec{u}=2\left(\operatorname{sen} 30^{\circ}, \cos 30^{\circ}\right)$ e $\vec{v}=4\left(\operatorname{sen} 60^{\circ}, \cos 60^{\circ}\right)$, o vetor $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ tem coordenadas:

A $(2+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

B $(1+2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$

C $(2\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

D $(2\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

E $(2+\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

Parabéns! A alternativa B está correta.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem ser escritos na forma:

$$\vec{u} = 2\left(\operatorname{sen} 30^{\circ}, \cos 30^{\circ}\right) = 2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, \sqrt{3})$$

e

$$\vec{v} = 4\left(\operatorname{sen} 60^{\circ}, \cos 60^{\circ}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (2\sqrt{3}, 2)$$

Portanto,

$$\vec{w} = (1, \sqrt{3}) + (2\sqrt{3}, 2) = (1 + 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$$



3 - Matrizes

Ao final deste módulo, você será capaz de operar com matrizes.

Álgebra das matrizes

Na Matemática, matriz é uma tabela composta por números que são distribuídos em linhas e colunas. Uma matriz do tipo m X n (lê-se por m por n), por exemplo, é uma tabela constituída de m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais).

Veja, a seguir, alguns exemplos:

Exemplo 1

A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2.

A matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×3.

A matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2×2.

A representação das matrizes se dá por uma letra maiúscula e de seus elementos por letras minúsculas, seguidas de dois indices subscritos que indicam a linha e a coluna que o elemento ocupa na matriz. Por exemplo, uma matriz A do tipo $m \times n$, pode ser expressa por $A = (a_{ij})_{mxn'}$ em que a a_{ij} é a indicação de cada elemento seu. Os indices i e j indicam, respectivamente, a linha e a coluna às quais o elemento pertence.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

No lugar dos colchetes, também podem ser utilizados parênteses. A matriz M acima também pode ser indicada por:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mnn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 2

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = 0$. Os demais elementos são:

$$a_{12} = -1; a_{21} = 2; a_{22} = 5; a_{31} = 3; a_{32} = 4$$

Há algumas matrizes que recebem nomes especiais, como as apresentadas a seguir.

Matriz linha

Formada por uma única linha.

$$M = [-1\ 0\ 2] \text{ é uma matriz linha } 1 \times 3.$$

Matriz coluna

Formada por uma única coluna.

$$N = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ é uma matriz coluna } 2 \times 1.$$

Matriz nula

Todos os elementos são iguais a zero.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz nula } 2 \times 3.$$

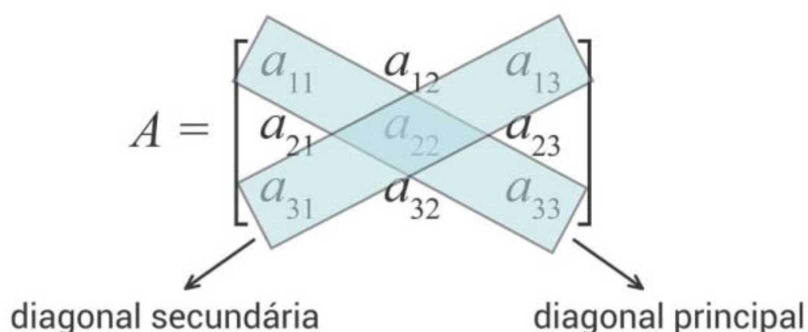
Matriz quadrada

O número de linhas é igual ao número de colunas.

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada } 2 \times 2$$

Quando uma matriz é quadrada, com n linhas e n colunas, dizemos que é uma matriz de ordem $\boldsymbol{n}$. As matrizes quadradas têm duas diagonais: a

principal e a secundária. Na matriz A, a seguir, estão indicadas suas diagonais.



Os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} determinam a diagonal principal e os elementos $a_{13}a_{22}$ e a_{31}, a diagonal secundária.

Exemplo 3

Dada a matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, os elementos **1** e **4** formam sua diagonal principal e os elementos **2** e **3** sua diagonal secundária. Um outro tipo de matriz que recebe nome especial é a matriz identidade, definida a seguir.

Matriz identidade de ordem $\boldsymbol{n}$, que denotamos por $\boldsymbol{I_n}$, é uma matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$ cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a $\mathbf{1}$ e os demais são nulos.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz identidade de ordem 2.}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem 3.}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem } n.$$

Atenção!

Duas matrizes de mesmo tipo (mesmo número de linhas e mesmo número de colunas) são consideradas iguais quando seus elementos correspondentes são iguais, isto é, os elementos que ocupam a mesma posição em cada uma das matrizes são iguais.

Por exemplo, se considerarmos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Dizemos que elas são iguais se, e somente se, $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12} a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

Exemplo 4

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2+x & w \\ y-1 & z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 2 & x-y \end{bmatrix}$$

Determine os valores de x, y, z e w sabendo que $A = B$.

Como $A = B$, então:

(i) $2 + x = y$
(ii) $y - 1 = 2$
(iii) $w = 0$
(iv) $z = x - y$

De (ii) e (iii), vemos que $y = 3$ e $w = 0$.

Daí, chegamos a $x = 1$ e $z = -2$.

Adição de matrizes

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, indicamos por $\boldsymbol{C}$ a soma $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. Para obtermos a matriz $\boldsymbol{C}$, devemos considerar que cada um dos seus elementos é resultado da soma dos elementos correspondentes de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+7 & 9+(-4) \\ 0+2 & 3+1 \\ 3+(-2) & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que a soma de duas (ou mais) matrizes só é possível quando elas são do mesmo tipo (mesmas dimensões).

Multiplicação de escalar por matriz

Dados um escalar real k e uma matriz A, o produto $k \cdot A$ é uma matriz e cada um de seus elementos é resultado do produto de k pelos elementos correspondentes da matriz A.

Exemplo:

$$(-3) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 3 & (-3) \cdot 7 \\ (-3) \cdot (-1) & (-3) \cdot 0 \\ (-3) \cdot 2 & (-3) \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -2 \\ 3 & 0 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}.$$

As operações de multiplicação de escalar por matriz e de adição de matrizes nos permitem realizar subtração de matrizes. Por exemplo, a subtração matricial $A - B$ pode ser expressa por $A + (-1)B$.

Multiplicação de matrizes

A multiplicação entre duas matrizes A e B, nessa ordem, só é possível quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. O resultado é uma matriz que tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B. Portanto, dadas duas matrizes $A_{(m \times n)}$ e $B_{(n \times p)}$, o produto entre elas, nessa ordem, é uma matriz $C_{(m \times p)}$.

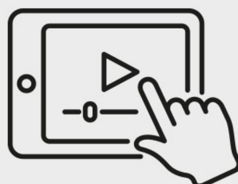
Cada elemento C_{ij} da matriz C é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos correspondentes elementos da coluna j da matriz B e somando-se os produtos obtidos.



Matrizes

No vídeo a seguir, o professor apresenta mais detalhes sobre este exemplo. Assista:

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.





Teoria na prática

As matrizes são aplicadas em diversos processos de cálculos e computacionais e podem, por exemplo, ser utilizadas para resolver sistemas lineares complexos. No entanto, veremos aqui uma aplicação simples e prática das matrizes.

Em uma empresa, a quantidade de 3 tipos de componentes A, B e C, utilizados na montagem de dois modelos P e Q de certo produto, são indicados na tabela a seguir:

	Modelos	
Componentes	P	Q
A	12	8
B	18	14
C	22	20

Tabela: Quantidade de tipos de componentes.
André Luís Corte Brochi.

Essa fábrica recebeu a seguinte encomenda desses aparelhos eletrônicos para os próximos dois meses. No primeiro mês, deve produzir 5 unidades do modelo P e 10 unidades do modelo Q. No segundo mês, deve produzir 15 unidades do modelo P e 25 unidades do modelo Q. Essas informações podem ser organizadas por meio de uma tabela.

	Encomendas	
Modelos	Março	Abril
P	5	15
Q	10	25

Tabela:Quantidade de encomendas para março e abril.
André Luís Corte Brochi.

Os valores das duas tabelas apresentadas podem ser representados pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 18 & 14 \\ 22 & 20 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$$

Para determinar a quantidade de cada um dos componentes que será utilizada em cada mês para atender às encomendas, basta efetuar a multiplicação de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$. A matriz resultante fornecerá tais valores.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 18 & 14 \\ 22 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot 5 + 8 \cdot 10 & 12 \cdot 15 + 8 \cdot 25 \\ 18 \cdot 5 + 14 \cdot 10 & 18 \cdot 15 + 14 \cdot 25 \\ 22 \cdot 5 + 20 \cdot 10 & 22 \cdot 15 + 20 \cdot 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 230 \\ 310 \end{bmatrix}$$

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ a matriz $M = A + 2B$ é dada por:

A $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

B $M = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

C $M = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D $M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

E $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

$$A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 & 14 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 2

Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, o produto $M \cdot N$ é dado por:

A $M = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 4 \\ -23 & 16 \end{bmatrix}$

B $M = \begin{bmatrix} -9 & -2 \\ 7 & 5 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$

C $M = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 8 & -4 \\ 23 & -16 \end{bmatrix}$

D $M = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -7 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

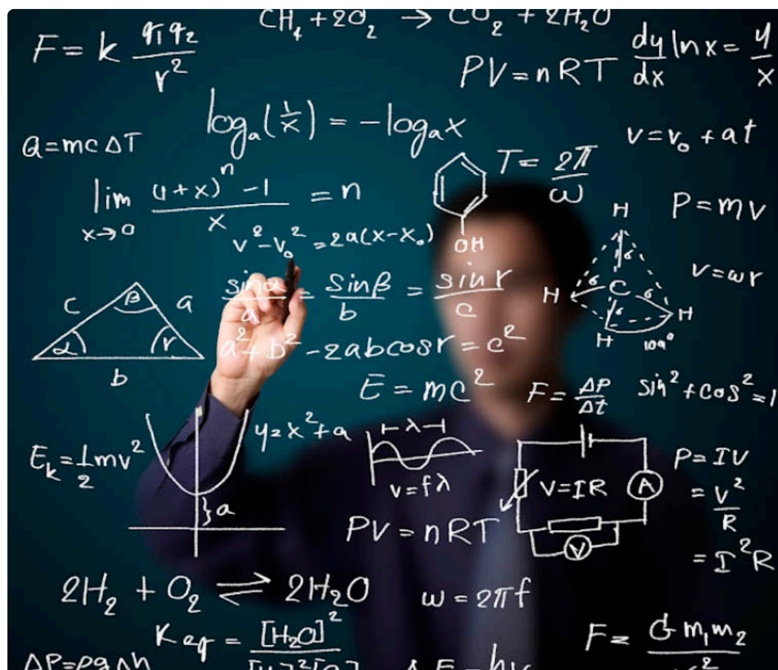
E $M = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -7 & -5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) & 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & -2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 8 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 8 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 4 \\ -23 & 16 \end{bmatrix}$$



4 - Matrizes como transformações lineares

Ao final deste módulo, você será capaz de reconhecer matrizes como transformações lineares.

Relação entre matrizes e vetores

No estudo de vetores, como vimos, fazemos a representação de um vetor pelo seu ponto terminal, já que consideramos sua origem como sendo o ponto **(0,0)**.

Comentário

Além das aplicações frequentes nos diversos ramos da Física, a teoria envolvendo vetores também é largamente utilizada na computação gráfica, em que os vetores indicam posições de pontos. São frequentemente chamados de vetores posição. Nos dispositivos de jogos, animações, diagnósticos por imagens etc., as imagens são tratadas como um conjunto de pontos ou vetores.

Veremos agora como podemos transformar um vetor, isto é, obter um novo vetor a partir do primeiro, através do uso de matrizes. Esse tipo de transformação é, geralmente, aplicado para indicar o movimento de um vetor.

Matrizes de transformação

Um vetor $\vec{v}$ do plano, que geralmente representamos algebricamente pelo par ordenado (x, y), pode também ser considerado uma matriz e, dessa forma, ser representado tanto como matriz coluna ou matriz linha. Conforme o tipo de cálculo em que será envolvido, ele poderá ser representado na forma matricial como:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou } \vec{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

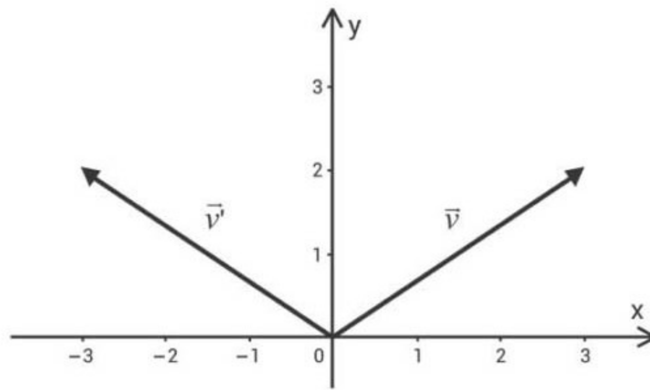
Quando tratamos com vetores do plano (bidimensionais), como o vetor $\vec{v}$ acima, podemos multiplicá-lo por uma matriz 2×2 para obter outro vetor. Nesse caso, dizemos que está ocorrendo uma transformação em $\vec{v}$. E a matriz utilizada é denominada uma matriz de transformação. Para compreender como ocorrem transformações desse tipo, nada melhor do que analisar alguns exemplos.

Exemplo 1

Dado o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, vamos transformá-lo utilizando a matriz $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, obtemos o vetor, que denotaremos por $\overrightarrow{v\prime}$. Portanto:

$$\overrightarrow{v\prime} = T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vamos observar o que ocorreu graficamente. Veja a imagem.



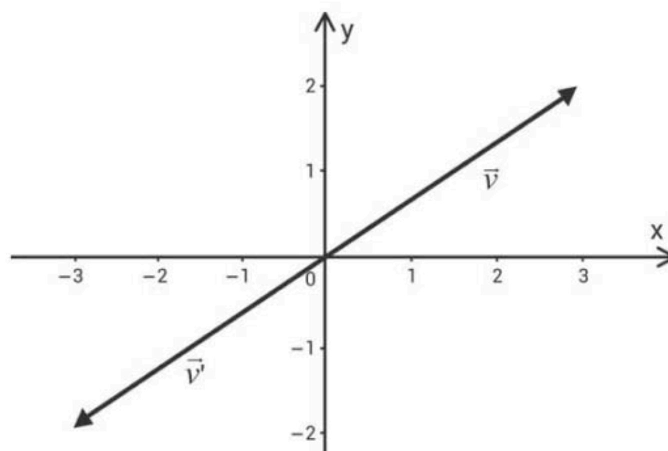
Observe que houve uma reflexão em relação ao eixo y, pois a transformação provocou a troca de sinal apenas da coordenada x do vetor, sem alterar seu módulo.

Exemplo 2

Agora, vamos considerar a matriz de transformação $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ aplicada sobre o mesmo vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$\overrightarrow{v\prime} = T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Observe, na imagem que, neste momento, a reflexão ocorre em relação à origem do sistema. O vetor transformado tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto.



No exemplo a seguir, veremos mais algumas transformações, alterando os valores da matriz que multiplica o vetor.

Exemplo 3

Considere o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para cada uma das matrizes de transformação a seguir, vamos determinar o vetor transformado $\vec{v}$.

a) $T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{v\prime} = T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, o vetor transformado $\overrightarrow{v\prime}$ tem mesma direção, sentido oposto e o dobro do módulo do vetor original $\vec{v}$.

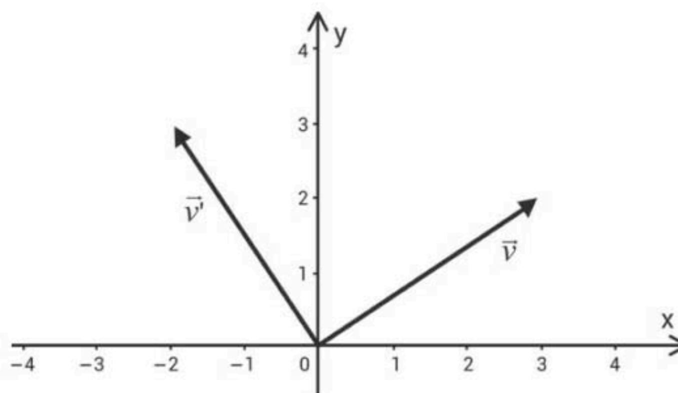
b) $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{v\prime} = T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

c) $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{v\prime} = T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, observe que o vetor $\vec{v}$ sofreu rotação de 90° no sentido anti-horário. Veja a imagem.



Esse tipo de procedimento também pode ser aplicado a polígonos e outras imagens. Veja, no exemplo a seguir, uma rotação de 90° no sentido anti-horário de um triângulo.

Exemplo 4

Considere o triângulo ABC tal que $A = (5, 3), B = (1, 4)$ e $C = (2, 2)$. Para rotacioná-lo 90° no sentido anti-horário, podemos aplicar a matriz de transformação $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a cada um de seus vértices (pontos A, B e C). Mas, é possível realizar esse cálculo de uma só vez montando uma única matriz com as coordenadas desses três pontos. Como são 3 pontos, tal matriz terá 3 colunas e 2 linhas, pois são duas coordenadas para cada ponto. A primeira linha da matriz será formada pelas coordenadas x desses pontos e a segunda linha pelas coordenadas y. Vamos denotá-la por M.

Nesse caso,

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

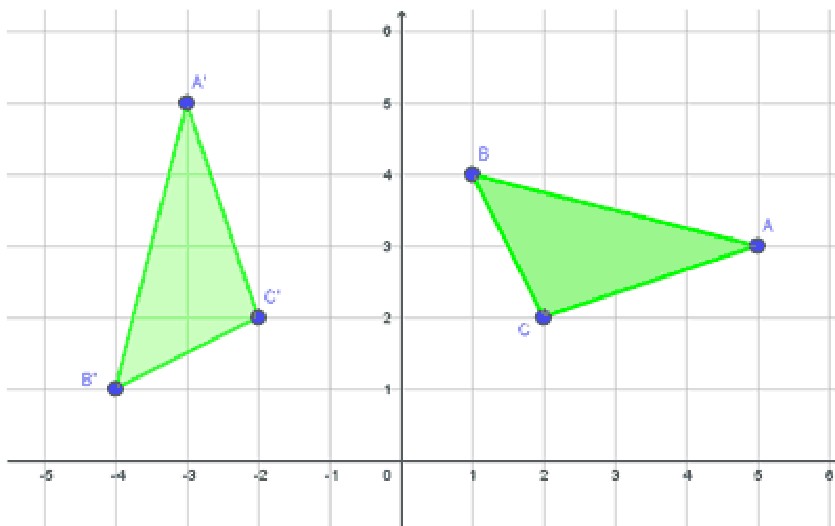
Efetuando a multiplicação de tais matrizes, teremos:

$$T \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, obtemos os pontos $A\prime$, $B\prime$ e $C\prime$ a partir das colunas da matriz resultante. Temos, portanto:

$$A\prime = (-3, 5), \quad B\prime = (-4, 1)\text{e} \\ C\prime = (-2, 2)$$

A imagem apresenta os triângulos antes e depois da rotação.



Assim como foi feito com o triângulo que você acabou de ver, qualquer imagem definida por pontos pode ser transformada utilizando matrizes. Experimente realizar esse tipo de transformação com outras matrizes.

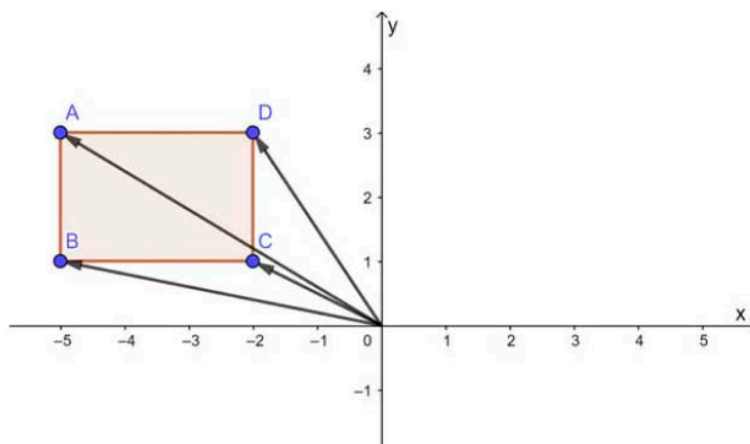


Teoria na prática

O processo de utilização de matrizes de transformação aplicadas em vetores é extremamente útil em computação gráfica, seja em jogos, animações, câmeras virtuais ou em aparelhos médicos de imagem.

A possibilidade de aplicar uma transformação sobre um ponto possibilita, por exemplo, alterar a posição de imagens, tanto bidimensionais como tridimensionais, para que o usuário possa ver o mesmo objeto sob outro ângulo. A multiplicação de vetores por matrizes de transformação é o que permite que o usuário do dispositivo em que a imagem está sendo projetada consiga visualizar objetos virtuais sob diferentes perspectivas.

Vamos considerar um exemplo em que uma figura, um retângulo nesse caso, deve movimentar-se em uma imagem. Para que isso aconteça, associamos a cada um de seus vértices um vetor, como mostra a imagem a seguir.



Se quisermos deslocar o vértice A 6 unidades à direita, por exemplo, como devemos proceder?

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Considere o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e a matriz de transformação $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. O vetor $\vec{v\prime}$ tal que $\vec{v\prime} = T \cdot \vec{v}$ é dado por:

A $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

$$\vec{v\prime} = T \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questão 2

Considere o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ e a matriz de transformação $T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. O vetor $\vec{v\prime}$ tal que $\vec{v\prime} = T \cdot \vec{v}$ é dado por:

A $\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

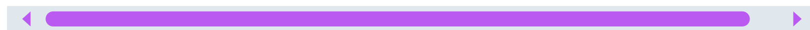
C $\begin{bmatrix} -9 \\ 3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$

E $\begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

$$\vec{v\prime} = T \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ 3 \end{bmatrix}$$



Considerações finais

Os vetores sempre tiveram uma importância muito grande no estudo de fenômenos físicos e, atualmente, assumem papel fundamental na tecnologia, em todas as situações em que se utiliza computação gráfica.

Apesar de apresentarmos, aqui, o estudo de vetores bidimensionais, eles podem assumir dimensões maiores em muitas aplicações. No entanto, vários procedimentos que você acabou de estudar são aplicáveis a vetores tridimensionais, por exemplo. Nesse caso, são vetores cuja representação ocorre no espaço tridimensional.

Da mesma forma, podemos dizer que há diversas situações em que as matrizes terão dimensões diferentes, sendo inúmeras as suas aplicações. No entanto, limitamo-nos, na maior parte dos casos, a matrizes quadradas de ordem 2, pois o intuito era utilizá-las em procedimentos com vetores bidimensionais. Além do que estudamos aqui, as matrizes são largamente utilizadas em resoluções de sistemas, dos mais simples aos mais complexos, em métodos estatísticos, entre outras situações.



Podcast

Ouça agora um resumo sobre vetores e matrizes.

Para ouvir o *áudio*, acesse a versão online deste conteúdo.



Explore +

Para saber mais sobre os assuntos explorados neste tema, utilize o aplicativo de Matemática chamado de Geogebra, o qual ajudará você nos estudos envolvendo vetores e matrizes. Trata-se de um software

livre, que dispõe de inúmeros recursos voltados à Álgebra e à Geometria.

Para a operação de matrizes, você também pode utilizar o Excel, que dispõe de recursos para somar, subtrair e multiplicar matrizes, além de dispor de função para calcular o determinante de uma matriz e a sua inversa.

Referências

CAMARGO, I. de; BOULOS, P. **Geometria Analítica**: um tratamento vetorial. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson, 1995.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2014.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?



Relatar problema